

# DS de mathématiques n°7

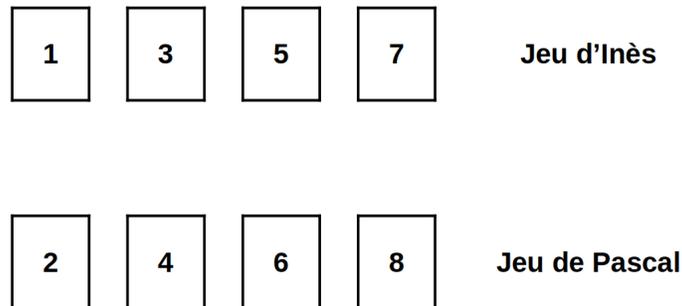
## Bataille Corsée

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées.

On ne demande pas de justification pointue et exhaustive pour répondre aux questions. Le principal est que l'on vous comprenne. Essayez autant que possible d'expliquer votre cheminement et votre raisonnement avec clarté. Cela sera pris en compte dans l'évaluation.

Toute trace de recherche, même infructueuse, peut influencer favorablement la notation.

Inès et Pascal jouent aux cartes. Ils décident de modifier les règles de la bataille, jeu trop peu stratégique à leur goût. Pour ce faire, ils disposent d'un jeu de  $2n$  cartes numérotées de 1 à  $2n$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Au début de la partie, Inès possède toutes les cartes impaires et Pascal possède toutes les cartes paires. Contrairement à la bataille, chaque joueur peut voir les cartes qu'il ou elle a en main et peut choisir laquelle va être jouée.



Distribution initiale des cartes avec  $n = 4$ , donc un total de  $2n = 8$  cartes.

Le jeu dure  $n$  tours. À chaque tour, l'un des deux joueurs choisit de jouer une carte. Puis l'autre joueur, après avoir vu la carte posée par son adversaire, en joue une. Celui qui a joué la carte avec le numéro le plus élevé marque un point, et les deux cartes sont défaussées.

Voici un exemple de partie avec  $n = 4$  (dans cet exemple, on suppose qu'Inès commence à chaque tour) :

- Inès joue son 3, Pascal joue son 8. Pascal marque 1 point.
- Inès joue son 1, Pascal joue son 6. Pascal marque 1 point.
- Inès joue son 7, Pascal joue son 2. Inès marque 1 point.
- Inès joue son 5, Pascal joue son 4. Inès marque 1 point.

Au total, Pascal marque 2 points et Inès marque 2 points. Il y a donc égalité. Cela étant, ce n'était qu'un échauffement et Pascal n'a pas joué de son mieux. **On supposera dans la suite que chaque joueur adopte la stratégie qui lui assurera le plus de points en fin de partie.**

**Les questions sont en page suivante !**

*Il n'est pas attendu que vous traitiez la totalité des questions.*

- 1) Inès et Pascal essaient les différentes règles du jeu suivantes. Pour chacune de ces règles, quel est le plus grand nombre de points qu'Inès peut s'assurer de marquer ? On pourra commencer par étudier de petites valeurs de  $n$ .
  - a) Inès commence à chaque tour.
  - b) Pascal commence à chaque tour.
  - c) Inès commence au premier tour puis à chaque tour, le joueur qui vient de *perdre* un point commence.
  - d) Même chose, mais Pascal commence au premier tour.
  - e) Inès commence au premier tour puis à chaque tour, le joueur qui vient de *gagner* un point commence.
  - f) Même chose, mais Pascal commence au premier tour.
- 2) Pour rendre le jeu équitable, les deux joueurs modifient les cartes. Désormais, chaque joueur possède initialement  $n$  cartes numérotées de 1 à  $n$ . Pour éviter les égalités sur un même pli (par exemple chaque joueur joue un 1), on ajoute la règle suivante : à chaque tour, le second à jouer n'a pas le droit de jouer une carte de même valeur que la carte du premier. Si c'est le dernier tour et que le second joueur n'a pas le choix, le dernier point n'est pas attribué. Reprendre la question 1) dans ce cadre, avec les différentes règles.
- 3) Inès propose une nouvelle répartition des cartes. On joue de nouveau avec des cartes numérotées de 1 à  $2n$ , mais en changeant la répartition initiale. Plus précisément, Inès veut être sûr de battre Pascal (c'est-à-dire avoir strictement plus de points que lui à la fin de la partie), mais elle veut que la **somme des valeurs** de ses  $n$  cartes **soit la plus petite possible**. Avec les différentes règles de la question 1), estimer cette somme.

Ce problème est issu de la session 2018 du TFJM<sup>2</sup> (Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens).

Monsieur et Madame Tic ont deux fils jumeaux. Comment s'appellent-ils ?

Réponse à 10h en amphi !